

*MATURA
ROZSZERZONA
MAJ 2025*

FORMUŁA 2023

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-100-2505

DATA: **12 maja 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

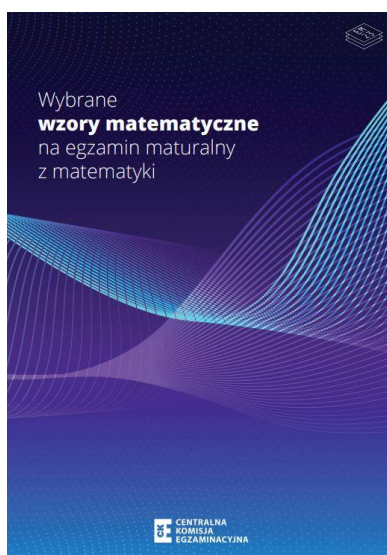
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki są umieszczone na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



1.

Zadanie 1. (0-2)

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,

k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,

t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625. $= N(2)$ ① $N_0 = 10^4$

1.

0-1-2

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.

SZUKANE

$$\left. \begin{array}{l} N_0 - 100\% \\ [N(1) - N_0] - x\% \end{array} \right\} x\% = \frac{(N(1) - N_0) \cdot 100\%}{N_0} \quad \left| \quad x\% = ? \right.$$

① $N(2) = 15625$

$$10^4 \cdot k^2 = 15625 \quad |:10^4$$

$$k^2 = 1,5625 \quad \sqrt{}, k > 0$$

$$k = 1,25 = \frac{5}{4}$$

② $N(1) = 10^4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^1$

$$N(1) = 12500$$

③ WZROST LICZEBNOŚCI
W CIĄGU 1 GODZINY.

$$N(1) - N_0 = 2500$$

④ $\left. \begin{array}{l} N_0 - 100\% \\ N(1) - N_0 - x\% \end{array} \right\} x_0 = \frac{2500 \cdot 100\%}{10000} = \underline{\underline{25\%}}$

Odp: Liczebność populacji bakterii wzrasta w ciągu każdej godziny o 25%

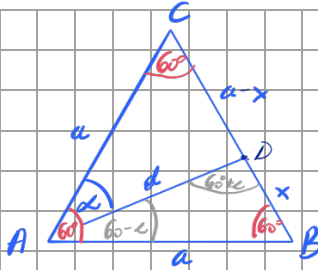


3.

Zadanie 3. (0-3)

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Oblicz miarę kąta DAC . Zapisz obliczenia.



② $\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 h - wysokość $\triangle ABC \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\alpha = ?$

I Metoda

① $\angle K D A B = 60^\circ - \alpha$
 $\angle A D B = \alpha + 60^\circ$

② $\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\frac{\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cot \alpha = 1 \quad \alpha \in (0^\circ; 60^\circ)$

Odpr: $\alpha = 45^\circ$

II Metoda

① $\frac{\frac{1}{2} x \cdot h}{\frac{1}{2} (a-x) \cdot h} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$2x = a(\sqrt{3}-1) - x(\sqrt{3}-1)$

$x(\sqrt{3}+1) = a(\sqrt{3}-1) \quad | : (\sqrt{3}+1)$

$x = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}$

$x = \frac{a \cdot 2(2-\sqrt{3})}{2} = (2-\sqrt{3})a$

①b $a-x = a - (2-\sqrt{3})a$
 $a-x = (\sqrt{3}-1)a$

② $\triangle ABD$ - Tw. cos.

$d^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos 60^\circ$

$d^2 = (2-\sqrt{3})^2 a^2 + a^2 - 2a^2(2-\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}$

$d^2 = (7-4\sqrt{3})a^2 + a^2 - (2-\sqrt{3})a^2$

$d^2 = 3(2-\sqrt{3})a^2 = (6-3\sqrt{3})a^2$

③ $\triangle ACD$ - Tw. sin.

$\frac{a-x}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin 60^\circ}$

$\frac{(\sqrt{3}-1)a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{2-\sqrt{3}} a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3} \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2 \sqrt{3} \sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{4(2+\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45^\circ$



Zadanie 4. (0-3)

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

4.

0-1-
2-3

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n = 6$ (nr. na kostce)
 $k = 4$ (rzuty kostką), $K, P \rightarrow \bar{n} = n^k$
 A - co najmniej jeden raz otrzymano 6 oczek
 B - dokładnie dwa razy otrzymano 5 oczek $P(A|B) = ?$

I Metoda

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \bar{n} &= 6^4 \\ \textcircled{2} \quad \bar{B} &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \times \binom{4}{2} = 5^2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 25 \cdot 6 = 150 \\ \textcircled{3} \quad \overline{A \cap B} &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \times \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \times \binom{4}{2} = \\ &= 4 \times 6 \cdot 2 + 6 = 54 \\ \textcircled{4} \quad \underline{\underline{P(A|B)}} &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overline{A \cap B}}{\bar{B}} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

II Metoda

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad p &= \frac{1}{6} \text{ (prawdop. sukcesu)} \\ q &= \frac{5}{6} \text{ (-1- porażki)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} P(B) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \dots = \frac{25}{216} = \frac{5^2}{6^3}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{A \cap B} = \binom{4}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 = \dots = 54 \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{54}{6^4}$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{\underline{P(A|B)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{54}{6^4} \cdot \frac{6^3}{25} = \frac{25}{150} = \frac{9}{25}$$



Zadanie 5. (0-4)

Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$$

Zapisz obliczenia.

$|x-2|$
 $|x+3|$

(1) dla $x \in (-\infty; -3)$:
 $-(x-2) + 2(x+3) < -2$
 $-x+2+2x+6 < -2$
 $x < -10 \quad \wedge \quad (1)$
 $x_1 \in (-\infty; -10)$

(2) dla $x \in (-3; 2)$:
 $-(x-2) - 2(x+3) < -2$
 $-x+2-2x-6 < -2$
 $-3x < 2 \quad / : (-3)$
 $x > -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad (2)$
 $x_2 \in (-\frac{2}{3}; 2)$

(3) dla $x \in (2; \infty)$:
 $x-2 - 2(x+3) < -2$
 $x-2-2x-6 < -2$
 $-x < 6 \quad / : (-1)$
 $x > -6 \quad \wedge \quad (3)$
 $x_3 \in (2; \infty)$

$x_1 \vee x_2 \vee x_3$

Odp: $x \in (-\infty; -10) \cup (-\frac{2}{3}; \infty)$

Zadanie 6. (0-4)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny.

W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

6. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

Zapisz obliczenia.

0-1-
2-3-4

$n \in \mathbb{N}^+$
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
 (a_n) zbieżny $\rightarrow |q| < 1$

$S = ?$
 (WSZYSTKIE PRZYPADKI)

① $a_1 + a_3 = 20$
 ② $a_1^2 + a_3^2 = 328$
 $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \rightarrow S = \frac{a_1}{1-q}$

① $a_1 + a_1 q^2 = 20$
 $a_1(1+q^2) = 20 \quad | : (1+q^2)$
 $a_1 = \frac{20}{1+q^2}$

② $a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328$
 $a_1^2(1+q^4) = 328$
 $\frac{400}{(1+q^2)^2} \cdot (1+q^4) = 328 \quad | : \frac{(1+q^2)^2}{8}$
 $50(1+q^4) = 41(1+2q^2+q^4)$
 $9q^4 - 82q^2 + 9 = 0 \quad | : 9$
 $q^4 - \frac{82}{9}q^2 + 1 = 0$
 $(q^2 - \frac{41}{9})^2 = \frac{41^2}{81} - \frac{81}{81} \quad | \sqrt{}$
 $|q^2 - \frac{41}{9}| = \frac{40}{9} \quad \wedge \quad q^2 > 0$
 $q^2 = 2 \quad \vee \quad q^2 = \frac{1}{9} \quad | \sqrt{}$
 symetne
 dla $|q| < 1$
 I $\begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ a_1 = 18 \end{cases} \quad \vee \quad \text{II} \begin{cases} q = -\frac{1}{3} \\ a_1 = 18 \end{cases}$

③ $\text{I: } S = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{2} = 27$
 $\text{II: } S = \frac{18}{1+\frac{1}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

Odp. SUMA WSZYSTKICH WYRAZÓW CIĄGU (a_n)
 WYNOŚI $13\frac{1}{2}$ LUB 27 .

Zadanie 7. (0-4)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD , a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

7.

0-1-
2-3-4

Wykaż, że $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$.

Z:

$\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$

T: $\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$

D: ① $|EF| = \frac{a+b}{2}$
 oraz $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

② WYSOKOŚĆ TRAPEZU = $2h$
 $h = |DP| = |PM| \Leftrightarrow P = S_{\Delta M}$

②

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{b+|EF|}{2} \cdot h}{\frac{|EF|+a}{2} \cdot h} = \frac{b+|EF|}{|EF|+a} \cdot \frac{2}{2} = \frac{b+\frac{a+b}{2}}{a+\frac{a+b}{2}} =$$

$$= \frac{a+3b}{2} : \frac{3a+b}{2} = \frac{a+3b}{3a+b} = \frac{1}{2}$$

Wp: $2a + 6b = 3a + b$
 $5b = a \quad | : 5$
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$

end.



Zadanie 8. (0-5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi O_1 oraz O_2 o równaniach:

• $O_1: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$

• $O_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45$.

① $O_1(S_1; r_1): S_1 = (1; -3); r_1 = \sqrt{5}$
 $O_2(S_2; r_2): S_2 = (2; 4); r_2 = 3\sqrt{5}$

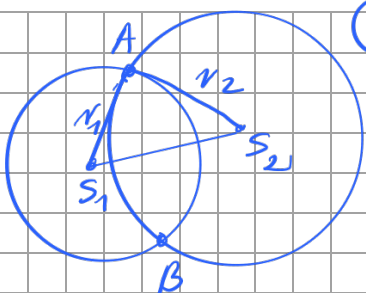
Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B . Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$. ③

② $A(x_A; y_A) \in (O_1 \cap O_2)$
 $B(x_B; y_B) \in (O_1 \cap O_2)$

Oblicz współrzędne punktów A , B oraz M . Zapisz obliczenia.

8.
0-1-
2-3-
4-5

①b $d = |S_1 S_2| < r_1 + r_2$
 $0 < d < 4\sqrt{5}$



② $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 5 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 45 \end{cases}$

$\begin{aligned} 2x - 3 + 14y - 7 &= -40 \\ 2x + 14y &= -30 \quad |:2 \\ x &= -7y - 15 \end{aligned}$

③ dla $M = (x; y)$:
 $\overrightarrow{AM} = -2 \overrightarrow{BM}$
 $[x - \frac{16}{5}; y + \frac{13}{5}] = -2[x + 1; y + 2]$
 $3x = \frac{6}{5} \wedge 3y = -\frac{33}{5} \quad |:3$
 $x = \frac{2}{5}, y = -\frac{11}{5}$
 $M = (\frac{2}{5}; -\frac{11}{5})$

②b $\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+3)^2 &= 5 \\ (-7y-16)^2 + (y+3)^2 &= 5 \\ 49y^2 + 224y + 256 + y^2 + 6y + 9 &= 5 \\ 50y^2 + 230y + 260 &= 0 \quad |:50 \\ y^2 + \frac{23}{5}y + \frac{26}{5} &= 0 \\ (y + \frac{23}{10})^2 &= \frac{529}{100} - \frac{26 \cdot 20}{100} \quad \sqrt{} \\ |y + \frac{23}{10}| &= \frac{3}{10} \\ y &= \frac{-23 \pm 3}{10} = \begin{cases} -\frac{13}{5} \\ -2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{13}{5} \\ x = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} > 0 \end{cases} \end{aligned}$

Odpi: $B(-1; -2)$, $A(3\frac{1}{5}; -2\frac{3}{5})$



Zadanie 9. (0-5)

Rozwiąż równanie

$$\textcircled{1} \quad 3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.

I Metoda

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 3\sin^2 x = 0 \quad \wedge \quad x \in \langle -\pi; \pi \rangle$$

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3}\sin 2x = 0$$

$$3\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0 \quad / : \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2x + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad / : (-2)$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{3k\pi}{6}$$

dla $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$: Odp: $x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

II Metoda

$$\textcircled{1} \quad 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sqrt{3}\sin(2x)$$

$$3\cos(2x) = -\sqrt{3}\sin(2x) \quad / : \frac{-1}{\sqrt{3}\cos(2x)} \neq 0$$

$$-\sqrt{3} = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

$$\tan(2x) = -\sqrt{3} \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

(1b)

oraz
dla
 $\cos(2x) = 0$

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot 2\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

$$\stackrel{=0}{=} -3\sin^2 x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$\text{sprawdzone}$$

$$\text{dla } \cos x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \text{dla } x \in \langle -\pi; \pi \rangle:$$

Odp: $x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Zadanie 10. (0-5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

10.

0-1-
2-3-
4-5

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

$H = |AS|$
 $|CS| = x + y = |CP| + |PS|$
 $a = 3\sqrt{34} = |AB| = |AC| = |BC| = |CD|$
 $\cos \beta = -\frac{9}{25}$
 $h = |BP| = |DP|$
 $P_b = ?$

① $\triangle BDP$ - Tw. cosin.
 $|BD|^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos \beta$
 $(a\sqrt{2})^2 = 2h^2(1 - \cos \beta)$
 $2a^2 = 2h^2(1 + \frac{9}{25}) \quad | : 2$
 $a^2 = \frac{34}{25} h^2 \quad | \sqrt{\cdot}, a, h > 0$
 $a = \frac{\sqrt{34}}{5} h \rightarrow h = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot a$
 $h = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot 3\sqrt{34} \rightarrow h = 15$

② (z uł. kł.)
 $\triangle CDP \sim \triangle DPS \sim \triangle ACS$
 $\frac{CP}{h} = \frac{h}{x} = \frac{y}{h} = \frac{b}{a}$
 $h^2 = xy \rightarrow y = \frac{15^2}{x}$

③ $\triangle CPD: x^2 + h^2 = a^2 \rightarrow x^2 = a^2 - 225 = 81 \rightarrow x = 9$
 $y = 25$
 $x + y = 34$

④ $\triangle ACS:$
 $H^2 + |AC|^2 = (x + y)^2$
 $H^2 = 34^2 - (a\sqrt{2})^2$
 $H^2 = 34^2 - 2 \cdot 9 \cdot 34$
 $H^2 = 544 \quad | \sqrt{\cdot}, H > 0$
 $H = 4\sqrt{34}$

⑤
 $P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot H + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x + y) \cdot h$
 $P_b = a \cdot H + (x + y) \cdot h$
 $P_b = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 34 \cdot 15$
 $P_b = 34(12 + 15) = 918$ [j.c.]

odp:

Zadanie 11. (0-6)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

$\rightarrow x_1 \neq x_2$

11.

0-1-
2-3-
4-5-6

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

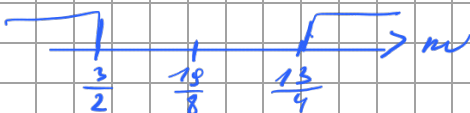
Zapisz obliczenia.

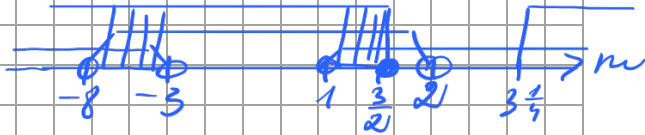
$$\begin{aligned} & \textcircled{4} (x_1 - x_2)^2 \leq 180 \quad \textcircled{1} 2 - m \neq 0 \\ & \rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0 \rightarrow \Delta > 0 \quad \textcircled{2} \\ & x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \textcircled{3} \end{aligned} \quad m = ?$$

① $m_1 \in \mathbb{R} - \{2\}$

② $4(2m+1)^2 - 4 \cdot (2-m)(m+8) > 0 \quad | :4$
 $4m^2 + 4m + 1 + 6m + m^2 - 16 > 0$
 $5m^2 + 10m - 15 > 0 \quad | :5$
 $m^2 + 2m - 3 > 0$
 $(m+3)(m-1) > 0$
 $m_2 \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

③ $\frac{m+8}{2-m} > 0 \quad | \cdot (2-m)^2 > 0$
 $(m+8)(2-m) > 0$
 $-(m+8)(m-2) > 0$
 $m_3 \in (-8; 2)$

④ $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$
 $\left[\frac{2(2m+1)}{2-m} \right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180 \quad | \cdot \frac{(2-m)^2}{4}$
 $4m^2 + 4m + 1 - (m+8)(2-m) \leq 45(4 - 4m + m^2)$
 $4m^2 + 4m + 1 + m^2 + 6m - 16 - 45 \cdot 4 + 45 \cdot 4m - 45m^2 \leq 0$
 $-40m^2 + 190m - 195 \leq 0 \quad | : (-40)$
 $m^2 - \frac{19}{4}m + \frac{39}{8} \geq 0$
 $(m - \frac{19}{8})^2 \geq \frac{19^2}{64} - \frac{39 \cdot 8}{64} \quad | \sqrt{\quad}$
 $|m - \frac{19}{8}| \geq \frac{7}{8}$

 $m_4 \in (-\infty; 1\frac{1}{2}) \cup (3\frac{1}{4}; \infty)$

⑤ $m_1 \cap m_2 \cap m_3 \cap m_4$:

Odp: $m \in (-8; -3) \cup (1; 1\frac{1}{2})$

12.1.

Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

Zadanie 12.1. (0-2)

Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

L:

$h = |CD| > 5$
 $d = |DE| = 5$
 $l = |CA| = |CB|$

T: $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
 $\angle = |\angle CBA| = |\angle CAB| = |\angle CDE|$

D: ① $\triangle DBE \sim \triangle DEC \sim \triangle DBC$ (2 w. k.k.)

$\cos \beta = \frac{d}{r} = \frac{|CE|}{h} \quad \wedge \quad |CE|^2 + d^2 = h^2$

$r = \frac{d \cdot h}{|CE|} \quad \wedge \quad |CE|^2 = h^2 - d^2$

$r = \frac{5 \cdot h}{|CE|} \quad |$

$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - d^2} \quad \wedge \quad d = 5$

$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$

② $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h$

$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$

end.

12.1.

0-1-2

12.2.

Zadanie 12.2. (0-4)

Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

12.2.

0-1-
2-3-4

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.

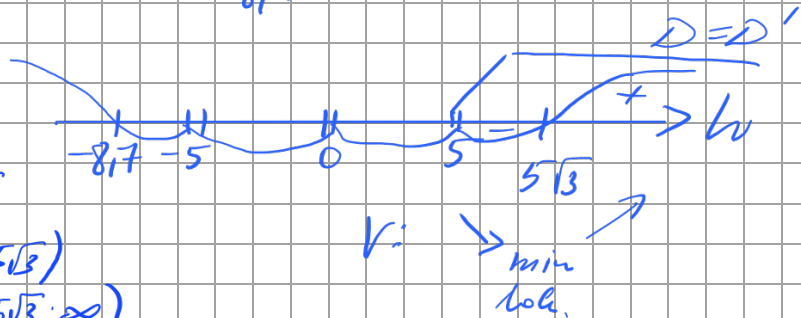
$V(h) = \text{najmniejsza (NM)}$

$h = ?$
 $V_{NM} = ?$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad V(h) &= \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - 25} \quad \text{I} \quad D = (5; \infty) \\ V' &= \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{3h^2(h^2 - 25) - h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2} = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^2[3(h^2 - 25) - 2h^2]}{(h^2 - 25)^2} \\ V' &= \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2} = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^2(h + 5\sqrt{3})(h - 5\sqrt{3})}{(h^2 - 25)^2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{WK: } V'(h) = 0 \text{ dla } h = 5\sqrt{3} \approx 8,7 \quad \text{I} \quad D' = (5; \infty)$$

$\textcircled{5} \quad \text{WN.}$



$$V'(h) = 0 \text{ dla } h = 5\sqrt{3}$$

$$V'(h) < 0 \text{ dla } h \in (5; 5\sqrt{3})$$

$$V'(h) > 0 \text{ dla } h \in (5\sqrt{3}; \infty)$$

$$V_{\min} (5\sqrt{3}) = V_{NM} (5\sqrt{3})$$

$$V_{NM} (5\sqrt{3}) = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{125 \cdot 3\sqrt{3}}{25 \cdot 3 - 25} = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{125\sqrt{3}}{50} = \frac{125\sqrt{3}}{2} \pi$$

Odp. dla $h = 5\sqrt{3}$ objętość stożka jest najmniejsza i wynosi $\frac{125\sqrt{3}}{2} \pi$.



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

